

劣モジユラ関数の概念は、離散構造にとって最も基本的で重要な概念である。その詳細は「基礎数理」の次のステップに属するが、展望を示すために、いくつかの話題を示す。

集合関数  $f: 2^S \rightarrow \mathbf{R}$  を考える。任意の  $A, B (\subseteq S)$  に対して

$$f(A) + f(B) \geq f(A \cup B) + f(A \cap B) \quad (1)$$

が成り立つとき、 $f$  を劣モジユラ関数 (submodular function) という。また、(1) を劣モジユラ不等式 (submodular inequality) という。

任意の  $A, B (\subseteq S)$  に対して (1) が成り立つという条件は、任意の  $C (\subseteq S)$  と任意の  $a, b (\in S \setminus C)$  に対して

$$f(C \cup \{a\}) + f(C \cup \{b\}) \geq f(C \cup \{a, b\}) + f(C) \quad (2)$$

が成り立つことと同値である。

例 1 :  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  の各要素の重みを表す実数  $w_1, \dots, w_n$  が与えられたとする。 $S$  の部分集合  $A$  に対して、 $f(A) = \max_{i \in A} w_i$  と定義される集合関数  $f$  は劣モジユラである。

例 2 : ベクトル  $a_1, \dots, a_n$  が与えられたとき、その部分集合の張る部分空間の次元を考える。 $S = \{1, 2, \dots, n\}$  とおくと、

$$f(A) = \dim \text{span}\{a_j \mid j \in A\} \quad (A \subseteq S)$$

で定義される関数  $f: 2^S \rightarrow \mathbf{R}$  は劣モジユラである。

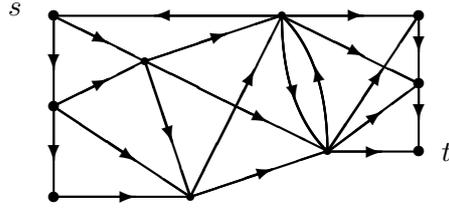
例 3 : 式 (1) の不等号  $\geq$  がつねに等号  $=$  で成り立つような関数  $f$  をモジユラ関数 (modular function) という (「包除原理とモジユラ関数」参照)。したがって、モジユラ関数は劣モジユラ関数である。

以下、いくつかの話題を示す。言葉の定義は詳しく書かずに、キーワードを並べる形で説明しているが、興味をもったら最後に挙げた参考書 (とくに [1], [5] など) を見て欲しい。

#### ADV1. 離散最適化 (ネットワークフロー問題)

ネットワークにおける最大流問題を考える。これは、道路網や水道網などにどれだけ自動車や水が流せるかというような問題の数理モデルで、オペレーションズ・リサーチ (OR) の分野での基本モデルである。

有向グラフ  $(V, A)$ 、容量関数  $c: A \rightarrow \mathbf{R}$  が与えられたとき、始点  $s \in V$  から終点  $t \in V$  にどれだけ流量が流せるかという問題 (最大流問題) を考える。頂点集合  $V$  の部分集合  $U$  で、 $s$  を含み  $t$  を含まないものをカットと呼び、カット  $U$  の容量  $\kappa(U)$  を  $U$  から出る辺の容量  $c(a)$  の和と定義すると、この関数  $\kappa$  は劣モジユラ関数になる。



流れ  $x : A \rightarrow \mathbf{R}$  の  $s$  から  $t$  への流量を  $F(x)$  とすると、各辺  $a \in A$  で容量制約条件  $0 \leq x(a) \leq c(a)$  が満たされていることにより、不等式  $F(x) \leq \kappa(U)$  が成り立つ。この不等式は制約条件を満たす任意の流れ  $x$  と任意のカット  $U$  に対して成り立つが、この不等式を等号で成立させるような  $x$  と  $U$  の存在、すなわち  $\max_x F(x) = \min_U \kappa(U)$  という形の関係式を主張する定理 (最大流最小カットの定理) がある。さらに、容量関数  $c$  が整数値の場合には流れ  $x$  を整数値としてもよい (最大流の整数性)。この定理からグラフ理論における Menger の定理や 2 部グラフの最大マッチング最小被覆の定理などを導出することができる。

### ADV2. 劣モジュラ関数と凸関数

劣モジュラ関数と凸関数は密接な関係をもつ。ここに述べる事実は 1982 年に発見された関係であり、離散凸解析 [ 4 ] [ 5 ] の出発点となっている。

非負ベクトル  $x = (x_j \mid j \in S) \in \mathbf{R}_+^S$  に対して、その成分のうちの相異なる値を  $\alpha_1 > \dots > \alpha_m$  とし  $S_i = \{j \in S \mid x_j \geq \alpha_i\}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) とおくと、

$$x = \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \chi^{S_i} + \alpha_m \chi^{S_m}$$

が成り立つ。ただし、部分集合  $A$  に対して  $\chi^A$  は  $\chi_j^A = 1$  ( $j \in A$ )、 $\chi_j^A = 0$  ( $j \in S \setminus A$ ) で定義されるベクトルである。この表現式に基づいて、新しい関数  $\hat{f} : \mathbf{R}_+^S \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) f(S_i) + \alpha_m f(S_m)$$

と定義する。任意の  $A$  に対して  $f(A) = \hat{f}(\chi^A)$  が成り立つので、関数  $\hat{f}$  は集合関数  $f$  の定義域を非負象限まで広げたものと見なすことができる。このとき、 $f$  が劣モジュラ関数であるためには、 $\hat{f}$  が凸関数であることが必要十分である (L. Lovász の定理)。

### ADV3. 双対定理

ここに述べる事実は、離散凸解析 [ 4 ] [ 5 ] において重要な役割を果たす定理である。

劣モジュラ関数  $f : 2^S \rightarrow \mathbf{R}$  と優モジュラ関数  $g : 2^S \rightarrow \mathbf{R}$  を考える。 $g$  が優モジュラ関数とは  $-g$  が劣モジュラ関数のことである。また、 $f(\emptyset) = 0$ 、 $g(\emptyset) = 0$  とする。

$f$  と  $g$  の間に

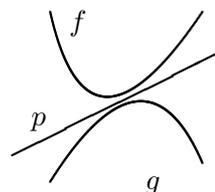
$$f(A) \geq g(A) \quad (\forall A \subseteq S)$$

の関係があるならば、

$$f(A) \geq p(A) \geq g(A) \quad (\forall A \subseteq S)$$

を満たす実数の分離ベクトル  $p = (p_j \mid j \in S) \in \mathbf{R}^S$  が存在する ( $p(A) = \sum_{j \in A} p_j$ ) . さらに,  $f$  と  $g$  がともに整数値をとるならば, 整数の分離ベクトル  $p \in \mathbf{Z}^S$  が存在する . これを劣モジュラ関数と優モジュラ関数に関する離散分離定理と呼ぶ (A. Frank による) .

前半の実数分離ベクトルの存在に関する主張は劣モジュラ関数と凸関数の関係, および, 凸関数に関する分離定理から導出できるが, 後半の整数性に関する主張は組合せ論的な性格のものであり, 凸関数の理論とは独立であり, 純粋に離散数学的な意義をもつ .



#### ADV4. エドモンズの交わり定理

劣モジュラ関数に関して, エドモンズの交わり定理 (Edmonds's intersection theorem) と呼ばれる最大最小定理がある . これはマトロイド理論における最も重要な双対定理であり, アルゴリズム理論や多面体的組合せ論においても中心的な位置を占めるものである .

同じ台集合  $S$  上の 2 つのマトロイド  $(S, \mathcal{I}_1, \rho_1)$ ,  $(S, \mathcal{I}_2, \rho_2)$  (ただし,  $\mathcal{I}_i, \rho_i$  ( $i = 1, 2$ ) はそれぞれの独立集合族, 階数関数) が与えられたとき, 共通独立集合の大きさと階数関数の間に

$$\max\{|I| \mid I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{\rho_1(A) + \rho_2(S \setminus A) \mid A \subseteq S\}$$

という最大最小関係式が成り立つという定理である . 左辺の  $\max$  を与える  $I$ , および右辺の  $\min$  を与える  $A$  を求める効率的なアルゴリズムが知られている . マトロイドの階数関数  $\rho_i$  は劣モジュラ関数であるが, さらに一般に, 2 つの劣モジュラ関数に対しても同様の定理が成り立つ .

#### ADV5. 束の上の劣モジュラ関数

劣モジュラ関数の概念は, 一般の束  $(L, \wedge, \vee)$  の上で定義された関数  $f$  に対しても拡張される . すなわち, 劣モジュラ不等式  $f(x) + f(y) \geq f(x \wedge y) + f(x \vee y)$  が任意の  $x, y \in L$  に対して成り立つとき,  $f : L \rightarrow \mathbf{R}$  を劣モジュラ関数という .

#### 参考書

- [ 1 ] 藤重 悟: グラフ・ネットワーク・組合せ論, 工系数学講座 1 8 巻, 共立出版, 2002.
- [ 2 ] S. Fujishige: *Submodular Functions and Optimization*, 2nd ed., Annals of Discrete Mathematics, 58, Elsevier, 2005.
- [ 3 ] K. Murota: *Matrices and Matroids for Systems Analysis, Algorithms and Combinatorics*, Vol.20, Springer-Verlag, 2000.
- [ 4 ] 室田一雄: 離散凸解析, 共立叢書 現代数学の潮流, 共立出版, 2001.
- [ 5 ] 室田一雄: 離散凸解析の考えかた, 共立出版, 2007.

以上 (2009-09-07)