基礎数理　室田

包除原理と劣モジュラ関数

1　包除原理 (基本形)

有限集合 S の部分集合 A_1,A_2, $\cdots$, A_k が与えられたとき，その要素数に関して

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{k-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k|$$

が成り立つ．例えば，$k = 3$ の場合にこの式を書くと，

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= (|A_1| + |A_2| + |A_3|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3|) \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned}$$

である．部分集合 A_i の S に関する補集合を $\overline{A_i}$ と表すと

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = |S| - |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_k}|$$

であるから，上の公式から

$$\begin{aligned} &|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_k}| \\ &= |S| - \sum_i |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^k|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| \end{aligned}$$

も得られる．これらの公式を**包除公式** (inclusion-exclusion formula) といい，これに基づいた数え上げの方法を**包除原理** (principle of inclusion and exclusion, inclusion-exclusion principle) と呼ぶ．

包除原理は与えられた条件を満たす集合の要素数や確率を計算するのに利用される．部分集合 A_i が性質 P_i を満たす要素の集合を表しているとすると，第 1 の公式の左辺は P_1, P_2, $\cdots$, P_k の少なくとも一つの性質をもつ要素の個数であり，第 2 の公式の左辺は P_1, P_2, $\cdots$, P_k のどの性質ももっていない要素の個数を表している．

2　包除原理 (一般形)

集合 S の部分集合に実数を対応させる関数 $f : 2^S \to \mathbf{R}$ を（S 上の）**集合関数**という．互いに素（すなわち $A \cap B = \emptyset$）である任意の A, B $(\subseteq S)$ に対して

$$f(A) + f(B) = f(A \cup B) \tag{1}$$

が成り立つとき，集合関数 f は**加法的** (additive) であるという．f が加法的ならば，$f(\emptyset) = 0$ である（証明：上の式で $B = \emptyset$ とすると，$f(A) + f(\emptyset) = f(A)$ となる）．

例 1：$S = \{1, 2, \ldots, n\}$ の各要素の重みを表す実数 $w_1, \ldots, w_n$ が与えられているとする．S の部分集合 A に対して，$f(A) = \sum_{i \in A} w_i$ と定義される集合関数 f は加法的である．ただし，空集合上の和 ($A = \emptyset$ のときの $\sum_{i \in A}$) は 0 と約束する．

包除原理は，加法的な集合関数 f に対して拡張され，

$$f(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = \sum_i f(A_i) - \sum_{i<j} f(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{k-1} f(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)$$

が成り立つ．これも**包除公式**と呼ぶ．

上の公式で $k = 2$ の場合は，

$$f(A) + f(B) = f(A \cup B) + f(A \cap B) \tag{2}$$

となる．これを**モジュラ等式** (modular equality) という．任意の A, B $(\subseteq S)$ に対して式 (2) が成り立つような集合関数 f を**モジュラ関数** (modular function) という．加法的関数に対して包除公式 $(k = 2)$ が成り立つから，任意の加法的関数はモジュラ関数であるが，実は，次の関係がある (証明は容易):

$$f \text{ が加法的} \iff f \text{ がモジュラ，かつ，} f(\emptyset) = 0. \tag{3}$$

例えば，例 1 の関数 f は，モジュラ関数である．

3　劣モジュラ関数

集合関数 $f : 2^S \to \mathbf{R}$ を考える．任意の A, B $(\subseteq S)$ に対して

$$f(A) + f(B) \geq f(A \cup B) + f(A \cap B) \tag{4}$$

が成り立つとき，f を**劣モジュラ関数** (submodular function) という．また，(4) を**劣モジュラ不等式** (submodular inequality) という．

任意の A, B $(\subseteq S)$ に対して (4) が成り立つという条件は，任意の C $(\subseteq S)$ と任意の a, b $(\in S \setminus C)$ に対して

$$f(C \cup \{a\}) + f(C \cup \{b\}) \geq f(C \cup \{a, b\}) + f(C) \tag{5}$$

が成り立つことと同値である．

例 2：$S = \{1, 2, \ldots, n\}$ の各要素の重みを表す実数 $w_1, \ldots, w_n$ が与えられたとする．S の部分集合 A に対して，$f(A) = \max_{i \in A} w_i$ と定義される集合関数 f は劣モジュラである．

例 3：ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が与えられたとき，その部分集合の張る部分空間の次元を考える．$S = \{1, 2, \ldots, n\}$ とおくとき，

$$f(A) = \dim \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_j \mid j \in A\} \qquad (A \subseteq S)$$

で定義される関数 $f : 2^S \to \mathbf{R}$ は劣モジュラである．

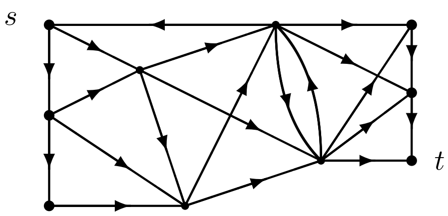
劣モジュラ関数の概念は，**離散構造**にとって最も基本的で重要な概念である．その詳細は「基礎数理」の次のステップに属するが，展望を示すために，いくつかの話題を示す．

以下　Advanced Topic

ADV1. 離散最適化（ネットワークフロー問題）

有向グラフ (V, A)，容量関数 $c : A \to \mathbf{R}$，始点 $s \in V$，終点 $t \in V$ で定義される最大流問題を考える．頂点集合 V の部分集合 U で，s を含み t を含まないものをカットと呼び，カット U の容量 $\kappa(U)$ を U から出る辺の容量 $c(a)$ の和と定義する．この関数 κ は劣モジュラ関数の典型例である．

流れ $x : A \to \mathbf{R}$ の s から t への流量を $F(x)$ とすると，各辺 $a \in A$ で容量制約条件 $0 \le x(a) \le c(a)$ が満たされていることにより，不等式 $F(x) \le \kappa(U)$ が成り立つ．この不等式は制約条件を満たす任意の流れ x と任意のカット U に対して成り立つが，この不等式を等号で成立させるような x と U の存在，すなわち $\max_x F(x) = \min_U \kappa(U)$ という形の関係式を主張する定理 (**最大流最小カットの定理**) がある．さらに，容量関数 c が整数値の場合には流れ x を整数値としてもよい（最大流の整数性）．この定理からグラフの Menger の定理や 2 部グラフの最大マッチング最小被覆の定理などを導出することができる．



ADV2. 劣モジュラ関数と凸関数

劣モジュラ関数と凸関数は密接な関係をもつ．非負ベクトル $x = (x_j \mid j \in S) \in \mathbf{R}^S_+$ に対して，その成分のうちの相異なる値を $\alpha_1 > \cdots > \alpha_m$ として $S_i = \{j \in S \mid x_j \ge \alpha_i\}$ $(i = 1, \ldots, m)$ とおくと，

$$x = \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \chi^{S_i} + \alpha_m \chi^{S_m}$$

が成り立つ．ただし，部分集合 A に対して χ^A は $\chi^A_j = 1$ $(j \in A)$，$\chi^A_j = 0$ $(j \in S \setminus A)$ で定義されるベクトルである．この表現式に基づいて，新しい関数 $\hat{f} : \mathbf{R}^S_+ \to \mathbf{R}$ を

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) f(S_i) + \alpha_m f(S_m)$$

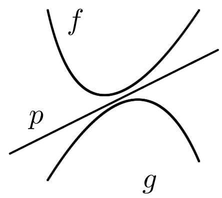
と定義する．任意の A に対して $f(A) = \hat{f}(\chi^A)$ が成り立つので，関数 $\hat{f}$ は集合関数 f の定義域を非負象限まで広げたものと見なすことができる．このとき，f が劣モジュラ関数であるためには，$\hat{f}$ が凸関数であることが必要十分である（L. Lovász の定理）．

ADV3. 双対定理

劣モジュラ関数 $f : 2^S \to \mathbf{R}$ と優モジュラ関数 $g : 2^S \to \mathbf{R}$ を考える．g が優モジュラ関数とは $-g$ が劣モジュラ関数のことである．また，$f(\emptyset) = 0, g(\emptyset) = 0$ とする．

f と g の間に $f(A) \geq g(A)$ $(\forall A \subseteq S)$ の関係があるならば，$f(A) \geq p(A) \geq g(A)$ $(\forall A \subseteq S)$ を満たす実数の分離ベクトル $p = (p_j \mid j \in S) \in \mathbf{R}^S$ が存在する $(p(A) = \sum_{j \in A} p_j)$．さらに，$f$ と g がともに整数値をとるならば，整数の分離ベクトル $p \in \mathbf{Z}^S$ が存在する．これを劣モジュラ関数と優モジュラ関数に関する**離散分離定理**と呼ぶ (A. Frank による)．

前半の実数分離ベクトルの存在に関する主張は劣モジュラ関数と凸関数の関係，および，凸関数に関する分離定理から導出できるが，後半の整数性に関する主張は組合せ論的な性格のものであり，凸関数の理論とは独立であり，純粋に離散数学的な意義をもつ．



ADV4. エドモンズの交わり定理

劣モジュラ関数に関して，エドモンズの交わり定理 (Edmonds's intersection theorem) と呼ばれる最大最小定理がある．これは**マトロイド理論**における最も重要な双対定理であり，**アルゴリズム理論**や多面体的組合せ論においても中心的な位置を占めるものである．

同じ台集合 S 上の 2 つのマトロイド $(S, \mathcal{I}_1, \rho_1)$, $(S, \mathcal{I}_2, \rho_2)$ (ただし，$\mathcal{I}_i$, ρ_i $(i = 1, 2)$ はそれぞれの独立集合族，階数関数) が与えられたとき，共通独立集合の大きさと階数関数の間に

$$\max\{|I| \mid I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{\rho_1(A) + \rho_2(S \setminus A) \mid A \subseteq S\}$$

という最大最小関係式が成り立つという定理である．左辺の max を与える I，および右辺の min を与える A を求める効率的なアルゴリズムが知られている．マトロイドの階数関数 ρ_i は劣モジュラ関数であるが，さらに一般に，2 つの劣モジュラ関数に対しても同様の定理が成り立つ．

ADV5. 束の上の劣モジュラ関数

劣モジュラ関数の概念は，一般の**束** $(L, \wedge, \vee)$ の上で定義された関数 f に対しても拡張される．すなわち，劣モジュラ不等式 $f(x) + f(y) \geq f(x \wedge y) + f(x \vee y)$ が任意の $x, y \in L$ に対して成り立つとき，$f : L \to \mathbf{R}$ を劣モジュラ関数という．

参考書

［1］S. Fujishige: *Submodular Functions and Optimization*, 2nd ed., Annals of Discrete Mathematics, **58**, Elsevier, 2005.

［2］藤重 悟：グラフ・ネットワーク・組合せ論，工系数学講座１８巻, 共立出版, 2002.

［3］室田一雄: 離散凸解析, 共立叢書 現代数学の潮流，共立出版, 2001.

［4］K. Murota: Matrices and Matroids for Systems Analysis, Algorithms and Combinatorics, Vol.20, Springer-Verlag, 2000.

以上 (2005-10-26）