コンパクト集合上の連続関数

◎第１段階：コンパクト集合上の連続関数　の有り難さを３つ挙げると …

コンパクト集合 K 上の連続関数は,

◎　最大値と最小値をもつ（→定理１）　$\longrightarrow$ 最適化ができる

◎　一様連続である（→定理３）　$\longrightarrow$ 近似ができる

◎　その全体 $\mathcal{C}(K)$ が一様ノルムに関して完備距離空間をなす（→定理２）

$\longrightarrow$ 距離空間の枠組みが利用できる

例えば,　（復習：開区間 $(0,1)$ はコンパクトでない）

・$f(x) = x(1-x)$ は，開区間 $(0,1)$ において最小値をもたない.

・$f(x) = \tan x$ は，開区間 $(-\pi/2, \pi/2)$ において最大値も最小値ももたない.

・$f(x) = 1/x$ は，開区間 $(0,1)$ において連続であるが一様連続でない.

◎第２段階：数学的に正確に述べて証明すると …

(X,d): 距離空間,　K: 距離空間 X のコンパクト部分集合,

$f : K \to \mathbf{R}$　連続関数,　$\mathcal{C}(K)$: K 上の連続関数の全体

$||f||_\infty = \sup_{x\in K} |f(x)|$　f の 一様ノルム

★定理１により，$f \in \mathcal{C}(K)$ に対して，$\sup_{x\in K}|f(x)|$ は有限値なので,
２つの関数 $f, g \in \mathcal{C}(K)$ の距離 $d(f,g) = ||f-g||_\infty$ が有限値になってくれる.

★コンパクト集合 K 上の連続関数の全体 $(\mathcal{C}(K), ||\cdot||_\infty)$ は距離空間をなす.

★連続関数の列 $(f_n)_n$ の一様収束は，$(\mathcal{C}(K), ||\cdot||_\infty)$ における収束に他ならない.

定理１：コンパクト集合上の連続関数は，最大値と最小値をもつ.

証明：　まず，作戦を練る.

◇値域　$R = \{f(x) \mid x \in K\}$　を考えるのは自然である.

◇最大値 (max) について証明すればよい.

$\Longrightarrow$ max の存在はまだ分かっていないから，とりあえず，$b = \sup R$（R の上限）とおく.

◇$b \in R$ ならば　$\exists a \in K$: $f(a) = b$ となって証明が終わるから，$b \in R$ を示せばよい.

$\Longrightarrow$ R が有界閉集合であることを示せばよい.

$\Longrightarrow$ R が点列コンパクトであることを示せばよい.

………という訳で，以下，R の点列コンパクト性を示す.

R に含まれる任意の点列 $(y_n)_n$ をとる (→これが R の点に収束する部分列をもつことを示したい)．$f(x_n) = y_n$ となる点列 $(x_n)_n \subseteq K$ が存在する．K の点列コンパクト性より，ある収束部分列 $(x_{n(k)})_k$ と $a \in K$ が存在して，$x_{n(k)} \to a$ $(k \to \infty)$. すると，f の連続性より $f(x_{n(k)}) \to f(a)$ $(k \to \infty)$. $y_{n(k)} = f(x_{n(k)})$ とおくと，$(y_{n(k)})_k$ は $(y_n)_n$ の収束部分列であり，その極限値は $f(a) \in R$.　（証終）

定理２：コンパクト集合 K 上の連続関数の全体 $(\mathcal{C}(K), ||\cdot||_\infty)$ は完備な距離空間.

証明：　まず，状況を整理して，作戦を練る.
◇ $(\mathcal{C}(K), ||\cdot||_\infty)$ が距離空間になることは，既知だから，問題なのは完備性だけ.
◇完備性とは，任意のコーシー列が収束することをいう．ここでの収束は一様収束の意味である.
◇ $(f_n)_n$ が一様収束する行き先（極限）を見出す必要があるが，それは，多分，$(f_n)_n$ の各点収束極限である.　問題点は３つある.
(A) 各点収束極限 g は存在するのか.　(B) 収束 $f_n \to g$ は一様か.　(C) g は連続か.

………以上の状況分析をもとに，証明をはじめる.

$(\mathcal{C}(K), ||\cdot||_\infty)$ における任意のコーシー列 $(f_n)_n$ を考える．コーシー列の定義により，

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon),\ \forall m, n: \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow ||f_m - f_n||_\infty < \varepsilon/2 \tag{1}$$

が成り立っている.
(A) 各 $x \in K$ に対して，$|f_m(x) - f_n(x)| \leq ||f_m - f_n||_\infty$ が成り立つので，(1) より，

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon),\ \forall m, n: \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2. \tag{2}$$

したがって，数列 $(f_n(x))_n$ は $\mathbf{R}$ におけるコーシー列である．$\mathbf{R}$ の完備性より，この数列は，ある値 $g(x)$ に収束する.

★これで，各点収束極限 g の存在が示された.

(B) g が $(f_n)_n$ の各点収束極限であることを式でかくと，

$$\forall x \in K,\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists n_1 = n_1(x, \varepsilon),\ \forall m: \quad m \geq n_1 \Rightarrow |f_m(x) - g(x)| < \varepsilon/2. \tag{3}$$

(2) と (3) において，$m = \max(n_0, n_1)$ と選んで，

$$|f_n(x) - g(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - g(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

を用いると，

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon),\ \forall n: \quad n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \tag{4}$$

となる．ここで n_0 は x に依存していないので，

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon),\ \forall n: \quad n \geq n_0 \Rightarrow ||f_n - g||_\infty < \varepsilon. \tag{5}$$

すなわち，$(f_n)_n$ は g に一様収束する.
(C) (B) により，g は連続関数の一様収束極限である．一方，一般に，連続関数の一様収束極限は連続関数である（資料：**各点収束と一様収束**を参照）．したがって，g は連続関数.　（証終）

以下　Advanced Topic

定理３：コンパクト集合上の連続関数は，一様連続.

証明：　まず，作戦を練る.
◇示したいこと (一様連続性) は,

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\hat{\delta}=\hat{\delta}_\varepsilon>0,\ \forall x,y\in K:\quad d(x,y)<\hat{\delta}_\varepsilon\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon. \tag{6}$$

◇仮定より，f は各点 $x\in K$ で連続だから,

$$\forall x\in K,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta_{x,\varepsilon}>0,\ \forall y\in K:\quad d(x,y)<\delta_{x,\varepsilon}\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2 \tag{7}$$

が成り立っている.
◇ x に依らない δ をつくるには　$\hat{\delta}_\varepsilon=\inf\limits_{x\in K}\delta_{x,\varepsilon}$　を考えればよい気がする.
　$\Longrightarrow$ x は無限個あるから，この下限が 0 になってしまう心配がある.
　$\Longrightarrow$ 有限個の下限に持ち込みたい.
　$\Longrightarrow$ コンパクト性（＝有限開被覆性）を使って，無限を有限に落とそう.

………では，上の作戦に従って，証明をはじめる.

$\varepsilon>0$ を固定する．各 $x\in K$ に対して，(7) にある $\delta_{x,\varepsilon}$ をとる.
$U_x=\{y\in X\mid d(x,y)<\frac{1}{2}\delta_{x,\varepsilon}\}$ とおくと，$\bigcup\limits_{x\in K}U_x\supseteq K$　は開被覆である.
K のコンパクト性により，有限個の $x_1,\ldots,x_m$ が存在して,

$$\bigcup_{i=1}^{m}U_{x_i}\supseteq K. \tag{8}$$

$\hat{\delta}_\varepsilon=\dfrac{1}{2}\min(\delta_{x_1,\varepsilon},\ldots,\delta_{x_m,\varepsilon})$　とおくと，　$\hat{\delta}_\varepsilon>0$　である.
$x,y\in K$ が (6) の条件　$d(x,y)<\hat{\delta}_\varepsilon$　を満たすとする.
被覆性 (8) により，ある i が存在して，$x\in U_{x_i}$．したがって　$d(x,x_i)<\dfrac{1}{2}\delta_{x_i,\varepsilon}$.
これと (7) より

$$|f(x_i)-f(x)|<\varepsilon/2. \tag{9}$$

また,

$$d(y,x_i)\le d(y,x)+d(x,x_i)<\hat{\delta}_\varepsilon+\frac{1}{2}\delta_{x_i,\varepsilon}\le\delta_{x_i,\varepsilon}$$

となるので，(7) より

$$|f(x_i)-f(y)|<\varepsilon/2. \tag{10}$$

(9) と (10) を足し合わせて

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x_i)-f(x)|+|f(x_i)-f(y)|<\varepsilon. \tag{11}$$

以上で (6) が示された.　（証終）

以上 (2010-12-12)