基礎数理　室田

距離空間の完備性

３段階に分けて理解する．

◎第１段階：詳しいことはともかく，事実として，

・実数の全体 $\mathbf{R}$ は完備であるが，有理数の全体 $\mathbf{Q}$ は完備でない．**数値の近似**
・閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数の全体 $\mathcal{C}([a,b])$ は，
一様ノルム (L^∞ ノルム) に関して完備であるが，
L^1 ノルムや L^2 ノルムに関して完備でない．**関数の近似**

（注意）一様ノルム (L^∞ ノルム) とは，

$$||f-g||_\infty = \sup_{a \le x \le b} |f(x)-g(x)|.$$

また，$p \ge 1$ のとき，L^p ノルムとは，

$$||f-g||_p = \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

◎第２段階：完備だと，なぜ嬉しいか．

・完備なら，近似の努力が報われる．
・完備なら，極限の存在が有限のところで判定できる．

例えば，
・方程式 $x^2-2=0$ の解を Newton 法で近似していくとき，初期値を $x_0=1$ とすると，近似値 x_n はすべて有理数である．しかし，有理数の範囲で考えていたのでは，極限 ($\sqrt{2}$) は存在しないので，近似解は収束できない．
・$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k^{-2}$ の極限値を求めるのは難しい．しかし，これが Cauchy 列であることは簡単にわかる．したがって，実数の範囲で考えれば，極限値をもつことが結論できる．しかし，有理数の範囲で考えていては極限の存在は不明である．実際，極限値は $\pi^2/6$ だから，有理数の範囲には極限が存在しない．

◎第３段階：完備性の定義

定義（完備性）：距離空間 (X,d) が完備 $\Longleftrightarrow$ 任意の Cauchy 列が収束する．

（注意）完備性は距離空間 (X,d) の性質である．集合 X が同じでも距離 d が違えば，完備かどうかは変わってくる．応用上の意味があって，数学的にも便利な距離が有り難い．

定理１：閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数の全体 $\mathcal{C}([a,b])$ は，一様ノルムに関して完備である．

証明：「連続関数の一様収束極限は，連続関数である」という有名な事実による．
$\longrightarrow$ これについては，資料：**連続関数の一様収束極限**を参照．

以上 (2007-09-14)