基礎数理　室田

有界閉集合でコンパクトでない例（無限次元空間で）　—Advanced Topic

有限次元空間 $\mathbf{R}^k$ では,「有界閉集合 $\Longleftrightarrow$ コンパクト集合」が成り立つが，無限次元空間では，有界閉集合でコンパクトでないものが存在する．

$X =$ 有界数列の全体　とし，数列 $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in X$ と $b = (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in X$ の距離を

$$d(a,b) = ||a-b|| = \sup_{n\in\mathbf{N}} |a_n - b_n|$$

と定義する．このとき，(X,d) は距離空間となる．

$$K = \{b \in X \mid ||b|| \leq 1\}$$

とおく．

1．K は有界閉集合である．
2．K は点列コンパクトでない．
3．K はコンパクトでない（有限被覆性をもたない）．

以下，これを証明（説明）する．有界閉集合であることは明らかである．

点列コンパクトでないことをみるために，$a^{(k)} = (0,0,\ldots,0,0,1,0,0,\ldots)$ (k 番目の成分だけが 1 である数列）から成る列 $(a^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ を考える．これは K に含まれる点列であるが，$k \neq l$ に対して $d(a^{(k)}, a^{(l)}) = 1$ だから，収束部分列をもたない．したがって，K は点列コンパクトでない．

コンパクトでない（有限被覆性をもたない）ことは，次のように示される．

$$\Lambda = \{a = (a_n) \in X \mid a_n \in \{0, \pm 1\} \quad (\forall n \in \mathbf{N})\}$$

とおき，$a \in \Lambda$ に対して

$$U_a = \{b = (b_n) \mid ||b - a|| < 2/3\}$$

と定義すると，各 a に対して U_a は開集合であり，さらに，

$$K \subseteq \bigcup_{a\in\Lambda} U_a$$

が成り立つ（証明：任意に $b \in K$ をとると，各 $n \in \mathbf{N}$ に対して，$|b_n + 1| < 2/3$ or $|b_n| < 2/3$ or $|b_n - 1| < 2/3$ が成り立つので，ある $a \in \Lambda$ が存在して，$b \in U_a$ となる）．したがって，これは，K の開被覆である．

さて，任意の有限集合 $\Lambda' \subseteq \Lambda$ に対して，ある $b \in \Lambda \setminus \Lambda'$ (Λ に含まれ，Λ' に含まれない）が存在する．このとき，$b_n \in \{0, \pm 1\}$ ゆえ，任意の $a \in \Lambda'$ に対して

$$||a - b|| = \sup_{n\in\mathbf{N}} |a_n - b_n| \geq 2/3$$

である．したがって，$b \notin \bigcup_{a\in\Lambda'} U_a$．一方，$b \in K$ であるから，$K \not\subseteq \bigcup_{a\in\Lambda'} U_a$．このようにして，$K \subseteq \bigcup_{a\in\Lambda} U_a$ は有限部分被覆をもたないことが示された．したがって，K はコンパクトでない．

以上 (2007-09-14)