基礎数理　室田

収束列と Cauchy 列

定義（収束）：数列 $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が a に収束する（記号: $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ a_n \to a$） $\Longleftrightarrow$

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N}:\ n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

定義（収束列）：数列 $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が収束列 $\Longleftrightarrow$

$$\exists a \in \mathbf{R},\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N}:\ n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon. \tag{2}$$

定義（Cauchy 列）：数列 $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が Cauchy 列 $\Longleftrightarrow$

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall m, n \in \mathbf{N}:\ m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon. \tag{3}$$

・「Cauchy 列」の読み方は「コーシーれつ」である．
・Cauchy 列のことを基本列ともいう．
・Cauchy 列と収束列の定義の違いを理解することが大切.
　Cauchy 列の定義は極限に言及していない.
・上の定義の条件 (3) は，最後の $<$ を $\leq$ に変えて次のようにしても等価である：

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall m, n \in \mathbf{N}:\ m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| \leq \varepsilon.$$

　また，ε を $\varepsilon/2$ に変えて次のようにしても等価である：

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall m, n \in \mathbf{N}:\ m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon/2.$$

命題１：収束列は Cauchy 列である．

　証明：$(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が収束列であるとし，$a_n \to a$ とする．Cauchy 列の定義 (3) にあわせるために，任意の $\varepsilon > 0$ を固定する．すると，収束の定義 (1) から，この ε に対して，ある $n_0 \in \mathbf{N}$ が存在して，$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon/2$ が成り立つ．記号を変えて，n を m と書いてもいいから，$m \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a| < \varepsilon/2$ も成り立つ．したがって，$m, n \geq n_0$ を満たす任意の m, n に対して，

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \varepsilon$$

が成り立つ．これは (3) にあっているので，$(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ は Cauchy 列である．（証終）

・上の命題１は，実数の世界 $\mathbf{R}$ でも有理数の世界 $\mathbf{Q}$ でも成り立つ．したがって，実数に特有の性質を表現している命題とは考えにくい．

・命題１の逆（Cauchy 列 $\Rightarrow$ 収束列）は，実数の世界 $\mathbf{R}$ では成り立つが，有理数の世界 $\mathbf{Q}$ では成り立たない．したがって，実数世界のもつ連続性を表現している命題と考えられる．これがつぎの命題２である．

命題２：$\mathbf{R}$ においては，Cauchy 列は収束列である．

証明：つぎの３段階から成る．

（１）Cauchy 列は有界列である．

（２）$\mathbf{R}$ においては，有界列は収束部分列をもつ．

（３）Cauchy 列が収束部分列をもてば，じつは，もともと収束列である．

（１）$(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が Cauchy 列であるとする．式 (3) で $\varepsilon = 1$, $m = n_0$ とすると，$\exists n_0 \in \mathbf{N}$, $\forall n \in \mathbf{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_{n_0}| < 1$ が成り立つ．$M = \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|) + 1$ とおけば，$\forall n \in \mathbf{N} : |a_n| < M$ が成り立つ．

（２）これは，Bolzano-Weierstrass の定理によって成り立つ．

（３）部分列 $(a_{n(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ が a に収束するとする．示したいことは $a_n \to a$ であるが，その定義 (1) にあわせるために，任意の $\varepsilon > 0$ を固定する．すると，部分列が収束することの定義 (1) から，この ε に対して，

$$\exists k_0 \in \mathbf{N},\ \forall k \in \mathbf{N}:\ k \geq k_0 \Rightarrow |a_{n(k)} - a| < \varepsilon/2$$

が成り立つ．一方，Cauchy 列の定義 (3) より，

$$\exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall m, n \in \mathbf{N}:\ m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon/2$$

が成り立つ．$k \geq k_0$ かつ $n(k) \geq n_0$ を満たす k を選んで $m = n(k)$ とすると，

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n(k)}| + |a_{n(k)} - a| < \varepsilon$$

となるので，

$$\forall n \in \mathbf{N}:\ n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

が導かれる．これは定義 (1) にあっているので，$(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ は a に収束する．(証終)

・命題２の証明において,（１）と（３）は有理数の世界 $\mathbf{Q}$ でも成り立つ．しかし,（２）は成り立たない．

・一般に「Cauchy 列は収束する」という性質を**完備性**という．この言葉を使うと，命題２は「$\mathbf{R}$ は（距離空間として）完備である」と言い換えられる．また,「$\mathbf{Q}$ は（距離空間として）完備でない」．

以上 (2006-11-06)